O anglo resolve

É trabalho pioneiro.
Prestação de serviços com tradição de confiabilidade.
Construtivo, procura colaborar com as Bancas Examinadoras em sua tarefa de não cometer injustiças.
Didático, mais do que um simples gabarito, auxilia o estudante no processo de aprendizagem, graças a seu formato: reprodução de cada questão, seguida da resolução elaborada pelos professores do Anglo.
No final, um comentário sobre as disciplinas.

a prova da 2ª fase da FUVEST

A 2ª fase da Fuvest consegue, de forma prática, propor para cada carreira um conjunto distinto de provas. Assim, por exemplo, o candidato a **Engenharia da Escola Politécnica** faz, na 2ª fase, provas de Língua Portuguesa (40 pontos), Matemática (40 pontos), Física (40 pontos) e Química (40 pontos). Já aquele que pretende ingressar na **Faculdade de Direito** faz somente três provas: Língua Portuguesa (80 pontos), História (40 pontos) e Geografia (40 pontos). Por sua vez, o candidato a **Medicina** tem provas de Língua Portuguesa (40 pontos), Biologia (40 pontos), Física (40 pontos) e Química (40 pontos).
Para efeito de classificação final, somam-se os pontos obtidos pelo candidato na 1ª e na 2ª fase.
Vale lembrar que a prova de Língua Portuguesa é obrigatória para todas as carreiras.

MATEMÁTICA

Questão 01

a) Quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1000?
b) Quantos múltiplos de 9 ou 15 há entre 100 e 1000?

Resolução:

a) O número de múltiplos de 9 é o número de termos da P.A. (108, 117, … , 999).

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \quad \therefore \quad 999 = 108 + (n - 1) \cdot 9 \quad \therefore \quad n = 100$

Resposta: 100

b) Somamos o número de múltiplos de 9 com o número de múltiplos de 15 e descontamos o número de múltiplos de 45 (múltiplos de 9 e 15) que foi computado duas vezes.

Assim,

m(9): $n = 100$

m(15): P.A. (105, 120, … , 990)

$990 = 105 + (n - 1) \cdot 15 \quad \therefore \quad n = 60$

$$m(45) \begin{cases} \text{P.A. } (135, 180, \dots, 990) \\ 990 = 135 + (n - 1) \cdot 45 \quad \therefore \quad n = 20 \end{cases}$$

Portanto, temos:

$100 + 60 - 20 = 140$

Resposta: 140

Questão 02

Um caminhão transporta maçãs, pêras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, pêras e laranjas, tem, respectivamente 50 maçãs, 60 pêras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, pêras e laranjas estão sendo transportadas.

Resolução:

Indicando por x, y e z, nessa ordem, as quantidades de caixas de maçãs, caixas de pêras e caixas de laranjas, podemos concluir, do enunciado, que:

$$\begin{cases} 50x + 60y + 100z = 10000 \\ x + y + z = 140 \\ 20x + 40y + 10z = 3300 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$x = 40$, $y = 50$ e $z = 50$.

A quantidade de maçãs é $50x = 2000$.
A quantidade de pêras é $60y = 3000$.
A quantidade de laranjas é $100z = 5000$.

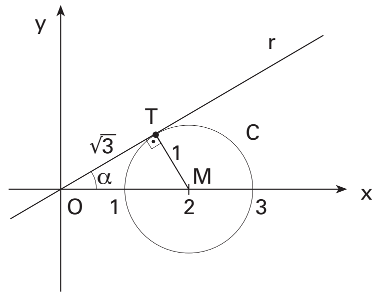
Resposta: 2000 maçãs, 3000 pêras e 5000 laranjas

Questão 03

a) A reta r passa pela origem do plano cartesiano e tem coeficiente angular $m > 0$. A circunferência C passa pelos pontos (1, 0) e (3, 0) e tem centro no eixo x. Para qual valor de m a reta r é tangente a C?
b) Suponha agora que o valor de m seja menor que aquele determinado no item anterior. Calcule a área do triângulo determinado pelo centro de C e pelos pontos de intersecção de r com C.

Resolução:

a) Do enunciado, temos a figura:



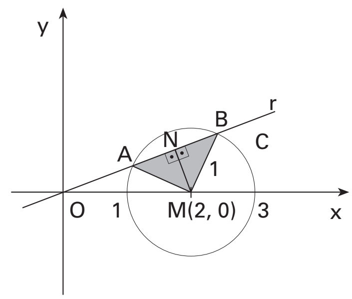
No triângulo retângulo OTM, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Considere a figura, onde AMB é o triângulo cuja área será calculada.



Como a equação de r é y = mx, ou seja, mx – y = 0, temos:

$$MN = \frac{|m \cdot 2 + (-1) \cdot 0|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

No triângulo retângulo MNB, temos:

$$(NB)^2 + (MN)^2 = (MB)^2$$

$$(NB)^2 + \frac{4m^2}{m^2 + 1} = 1 \quad \therefore \quad NB = \frac{\sqrt{1 - 3m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Logo, a área S do triângulo MAB é:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (MN)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{1 - 3m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}} \cdot \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$S = \frac{2|m|\sqrt{1 - 3m^2}}{m^2 + 1}, -\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}, m \neq 0$$

Resposta: $\frac{2|m|\sqrt{1 - 3m^2}}{m^2 + 1}, -\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}, m \neq 0$

Questão 04

Em uma equipe de basquete, a distribuição de idades dos seus jogadores é a seguinte:

idade	*Nº de jogadores*
22	1
25	3
26	4
29	1
31	2
32	1

Será sorteada, aleatoriamente, uma comissão de dois jogadores que representará a equipe junto aos dirigentes.

a) Quantas possibilidades distintas existem para formar esta comissão?

b) Qual a probabilidade da média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores?

Resolução:

a) $C_{12,2} = \dfrac{12!}{2!\,10!} = \dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$

Resposta: 66

b) A média das idades de todos os jogadores é:

$$\overline{x} = \frac{22(1) + 25(3) + 26(4) + 29(1) + 31(2) + 32(1)}{12} = 27$$

Sendo x_1 e x_2 as idades dos jogadores sorteados:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < 27 \quad \therefore \quad x_1 + x_2 < 54$$

Possibilidades para x_1 e x_2		Quantidade
22 e 25	$\longrightarrow$	$1 \cdot 3 = 3$
22 e 26	$\longrightarrow$	$1 \cdot 4 = 4$
22 e 29	$\longrightarrow$	$1 \cdot 1 = 1$
22 e 31	$\longrightarrow$	$1 \cdot 2 = 2$
23 e 25	$\longrightarrow$	$C_{3,2} = 3$
25 e 26	$\longrightarrow$	$3 \cdot 4 = 12$
26 e 26	$\longrightarrow$	$C_{4,2} = 6$

O número de casos favoráveis:

$3 + 4 + 1 + 2 + 3 + 12 + 6 = 31$

A probabilidade pedida é:

$$P = \frac{31}{66}$$

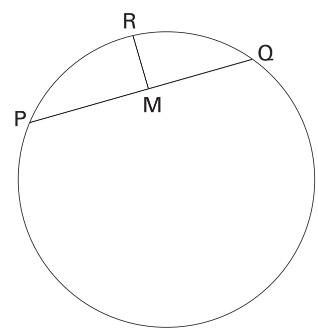
Resposta: $\dfrac{31}{66}$

Questão 05

Na figura ao lado, M é o ponto médio da corda $\overline{PQ}$ da circunferência e PQ = 8.

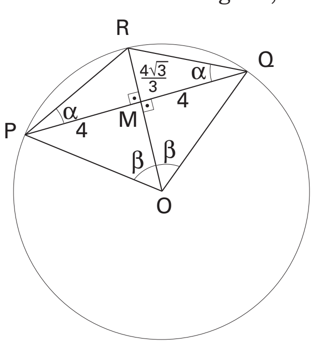
O segmento $\overline{RM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e $RM = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Calcule:

a) O raio da circunferência.
b) A medida do ângulo $P\hat{O}Q$, onde O é o centro da circunferência.



Resolução:

Do enunciado temos a figura, onde O é o centro da circunferência.



a) No triângulo retângulo PMR, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4} \quad \therefore \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, $\alpha = 30°$

Sendo $\alpha = 30°$, o ângulo central $R\hat{O}Q$ tem medida $\beta = 60°$.

No triângulo retângulo OMQ, temos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{MQ}{OQ}$$

$$\operatorname{sen}60^\circ = \frac{4}{OQ}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{OQ} \quad \therefore \quad OQ = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

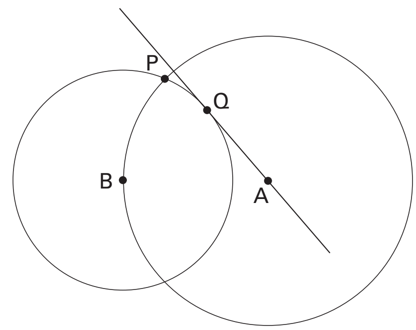
Resposta: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

b) Sabemos que $\beta = 60°$.
Logo, a medida do ângulo $P\hat{O}Q$ é 2β, ou seja, 120°.
Resposta: 120°

Questão 06

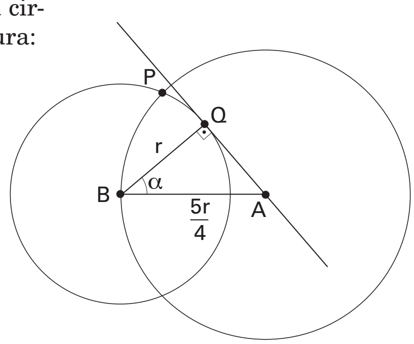
Na figura ao lado, as circunferências têm centros A e B. O raio da maior é $\frac{5}{4}$ do raio da menor; P é um ponto de intersecção delas e a reta $\overleftrightarrow{AQ}$ é tangente à circunferência menor no ponto Q. Calcule:

a) cos $A\hat{B}Q$
b) cos $A\hat{B}P$
c) cos $Q\hat{B}P$



Resolução:

a) Do enunciado, sendo *r* o raio da circunferência menor, temos a figura:

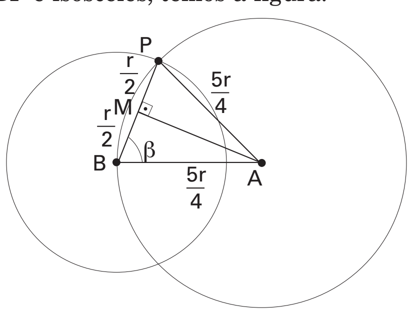


Do triângulo ABQ temos:

$$\cos\alpha = \frac{r}{\frac{5r}{4}} \;\therefore\; \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Resposta: $\cos A\hat{B}Q = \frac{4}{5}$

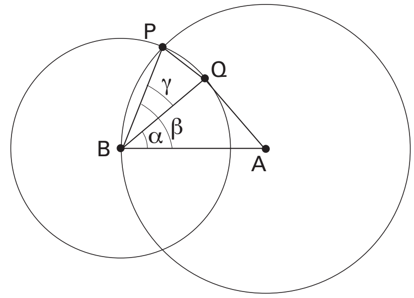
b) Como o triângulo ABP é isósceles, temos a figura:



Assim:

$$\cos\beta = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{5r}{4}} \;\therefore\; \cos\beta = \frac{2}{5}$$

Resposta: $\cos A\hat{B}P = \frac{2}{5}$



c) Sendo γ a medida de $Q\hat{B}P$, da figura temos $\gamma = \beta - \alpha$.

Assim: $\cos\gamma = \cos(\beta - \alpha)$

$\cos\gamma = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$

Como $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ e $\cos\beta = \dfrac{2}{5}$, da relação fundamental temos:

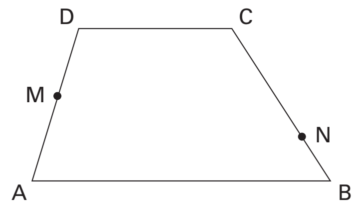
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Logo: $\cos\gamma = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{4}{5} + \dfrac{\sqrt{21}}{5} \cdot \dfrac{3}{5}$

$$\cos\gamma = \frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$$

Resposta: $\cos Q\hat{B}P = \dfrac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$

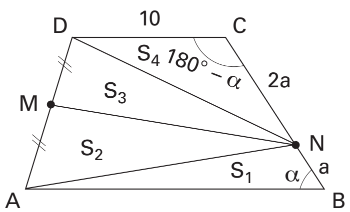
Questão 07



No trapézio ABCD, M é o ponto médio do lado $\overline{AD}$; N está sobre o lado $\overline{BC}$ e $2BN = NC$. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros ABNM e CDMN são iguais e que DC = 10. Calcule AB.

Resolução:

Do enunciado, temos a figura:



S_1 ... área do triângulo BAN
S_2 ... área do triângulo AMN
S_3 ... área do triângulo DNM
S_4 ... área do triângulo DCN

Devemos ter $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ (I).
Como NM é mediana do triângulo NAD, então $S_2 = S_3$ (II).
De (I) e (II), temos:

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4$$
$$S_1 + S_2 = S_2 + S_4$$

Logo, $S_1 = S_4$.
Portanto, temos que:

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot a \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2a \cdot \operatorname{sen}(180° - \alpha) \quad \therefore \quad AB = 20$$

Resposta: 20

Questão 08

Nos itens abaixo, z denota um número complexo e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Suponha $z \neq i$.

a) Para quais valores de z tem-se $\dfrac{z + i}{1 + iz} = 2$*?*

b) Determine o conjunto de todos os valores de z para os quais $\dfrac{z + i}{1 + iz}$ *é um número real.*

Resolução:

a) De $\dfrac{z + i}{1 + iz} = 2$, temos:

$z + i = 2(1 + iz)$
$z + i = 2 + 2iz$

$$z - 2i \cdot z = 2 - i$$
$$z \cdot (1 - 2i) = 2 - i$$
$$z = \frac{2 - i}{1 - 2i}$$
$$z = \frac{2 - i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i}$$
$$z = \frac{2 + 4i - i - 2i^2}{1 - 4i^2} \quad \therefore \quad z = \frac{4 + 3i}{5}$$

Resposta: $\frac{4 + 3i}{5}$

b) De $\frac{z + i}{1 + i \cdot z} = r$ e $r \in \mathbb{R}$, temos:

$$z + i = r + r \cdot iz$$
$$z - r \cdot iz = r - i$$
$$z(1 - ri) = r - i$$
$$z = \frac{r - i}{1 - ri}$$
$$z = \frac{r - i}{1 - ri} \cdot \frac{1 + ri}{1 + ri} \quad \therefore \quad z = \frac{r + r^2 \cdot i - i - r \cdot i^2}{1 - r^2 \cdot i^2}$$
$$z = \frac{2r + (r^2 - 1)i}{1 + r^2}$$ (Note que $r \in \mathbb{R} \Rightarrow z \neq i$.)

Resposta: $\left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, z = \frac{2r + (r^2 - 1)i}{1 + r^2},\ r \in \mathbb{R} \right\}$

Questão 09

Determine os valores de x no intervalo $]0, 2\pi[$ para os quais $\cos x \geqslant \sqrt{3}\,\operatorname{sen} x + \sqrt{3}$.

Resolução:

$$\cos x - \sqrt{3}\,\operatorname{sen} x \geqslant \sqrt{3} \quad \therefore \quad \frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trocando $\frac{1}{2}$ por $\cos\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, temos

$$\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim:

$$-\frac{\pi}{6} + h \cdot 2\pi \leqslant x + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{6} + h \cdot 2\pi,\ h \in \mathbb{Z}.$$
$$-\frac{\pi}{2} + h \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + h \cdot 2\pi,\ h \in \mathbb{Z}.$$

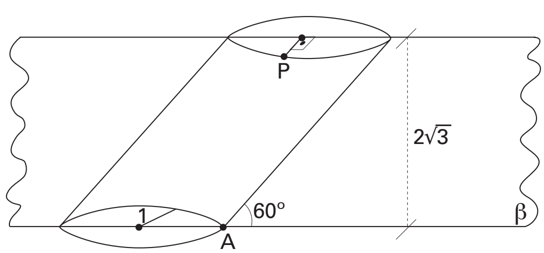
Como $x \in \,]0, 2\pi[$:

$$h = 1 \rightarrow \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}$$

Resposta: $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} \right\}$

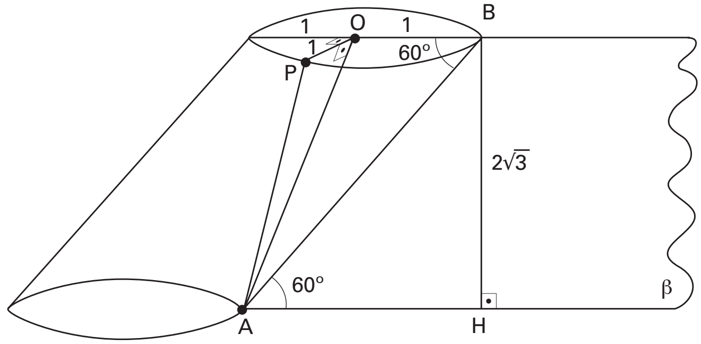
Questão 10

Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de 60° (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



Resolução:

Do enunciado, o segmento $\overline{PO}$ é perpendicular a β. Como a reta $\overleftrightarrow{AO}$ está contida em β e é concorrente com $\overleftrightarrow{PO}$, então essas retas são perpendiculares em O.
Temos figura:



No triângulo retângulo AHB, temos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AB} \quad \therefore \quad AB = 4$$

Aplicando o teorema dos co-senos no triângulo AOB, temos:

$$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot (OB) \cdot (AB) \cdot \cos 60^\circ$$

$$(AO)^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \quad \therefore \quad (AO)^2 = 13$$

No triângulo retângulo POA, temos:

$$(PA)^2 = (PO)^2 + (AO)^2, \text{ ou seja, } (PA)^2 = 1^2 + 13 \quad \therefore \quad PA = \sqrt{14}$$

Resposta: $\sqrt{14}$

Observação: Admitimos que o ponto O é o centro da base superior do cilindro.

COMENTÁRIO

Uma prova bem elaborada, com questões criativas, porém pouco abrangente e trabalhosa.

Estranhamos a ausência da tradicional questão de Construção Geométrica, proposta pela FUVEST nos últimos vestibulares.