Questão 5

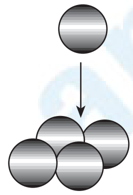
Uma caixa aberta, em forma de cubo com 20 cm de aresta, está cheia de esferas de 1 cm de diâmetro. Estime quantas esferas contém essa caixa.

Resolução

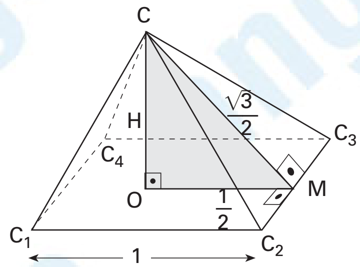
Vamos considerar que uma esfera só está contida em uma caixa se nenhum de seus pontos estiver fora da caixa. Além disso, as esferas que preenchem a caixa podem estar arrumadas de diferentes maneiras. Por se tratar de uma estimativa, vamos arbitrariamente escolher um possível arranjo, descrito a seguir:

I. Coloca-se inicialmente uma camada de $20 \cdot 20 = 400$ esferas, todas elas tocando o fundo da caixa.

II. Na camada seguinte, cada esfera se apóia em quatro esferas da camada anterior, como mostra a figura, conseguindo-se $19 \cdot 19 = 361$ esferas.



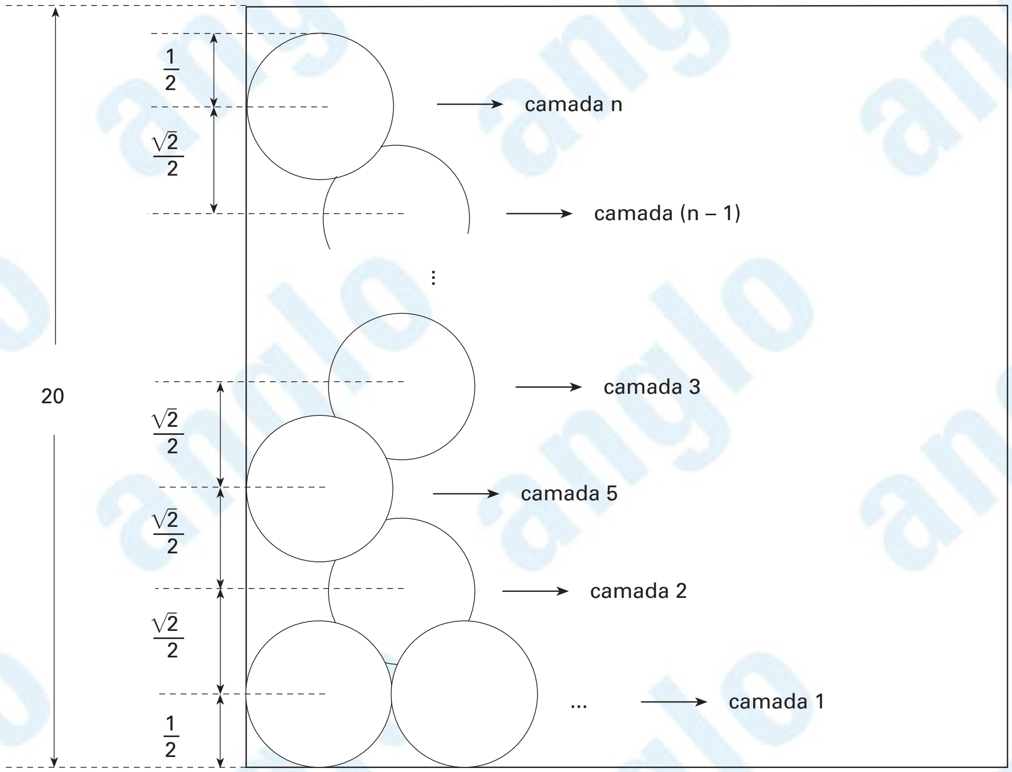
III. A terceira e a quarta camadas repetem as disposições da primeira e da segunda, respectivamente, e assim sucessivamente até que a caixa fique cheia.
Sejam C_1, C_2, C_3, C_4 e C os centros das esferas mostradas na figura do item II. Esses pontos são vértices de uma pirâmide quadrangular regular de altura H, como mostra a figura, cotada em centímetros.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo MCO, temos:

$$H^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \therefore \quad H = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A figura a seguir mostra uma parte da vista frontal da caixa:



Sendo n o maior número de camadas de esferas que cabem na caixa, de acordo com o arranjo utilizado, devemos ter:

$$(n-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\leqslant 20$$

$$n-1\leqslant 19\sqrt{2}$$

$$n\leqslant 19\sqrt{2}+1\approx 27{,}87$$

Logo, n = 27, ou seja, temos 14 camadas com 400 esferas e 13 camadas com 361 esferas. Então, o total de esferas é igual a (14 · 400 + 13 · 361), isto é, 10293.

Resposta: 10293

Nota: por se tratar de uma estimativa, e por não ter sido fornecido o tipo de arranjo das esferas, a banca examinadora deve aceitar outras soluções diferentes da apresentada.