Resolução – simulado de matemática (2005)

1. Chamando de p o preço unitário do produto, na primeira promoção o comprador adquiriu mercadoria no valor de 3p, pagando 2p. Sendo assim, vamos calcular o valor do desconto:

   3p — 100%

   2p — x $\Rightarrow$ $x=\frac{200}{3}\%$, ou seja, um desconto de $\frac{100}{3}\%$.

   Para a segunda promoção, temos:

   5p — 100%

   3p — y $\Rightarrow$ $y=\frac{300}{5}\%$, ou seja, um desconto de $\frac{200}{5}\% = 40\%$.

   Calculando $y - x$, encontramos $\frac{20}{3}\% \approx 6{,}7\%$

   Alternativa C

2.

$$\begin{cases} y^{2x} = z^{x} & (1) \\ 2^{z} = 2.4^{x} & (2) \\ x + y + z = 16 & (3) \end{cases}$$

Dadas as condições de x, y e z, da equação (1) temos que z = y² (4). De (2) temos que z=1+2x (5). Substituindo (5) em (4), segue que $x = \frac{y^2 - 1}{2}$ (6).

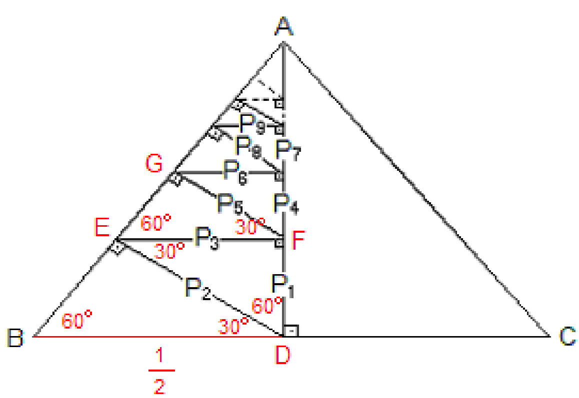
Substituindo (4) e (6) em (3), teremos:

$$\frac{y^2-1}{2} + y + y^2 = 16 \;\rightarrow\; 3y^2 + 2y - 33 = 0 \;\rightarrow\; \text{O único inteiro positivo é } y' = 3$$

Então, x=4 , y=3 e z=9, o que implica $\frac{x.z}{y} = 12$.

Alternativa A

3. Da figura, temos:



Do triângulo BDE, $\cos 30^\circ = \frac{P_2}{\frac{1}{2}} \rightarrow P_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Do triângulo DEF, $\cos 30^o = \dfrac{P_3}{P_2} \rightarrow P_3 = \dfrac{3}{8}$.

Do triângulo EFG, $\cos 30^o = \dfrac{P_5}{P_3} \rightarrow P_3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

Note que a seqüência $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{3\sqrt{3}}{16}, \ldots\right)$ é uma PG de razão $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. A soma dos infinitos termos dessa PG é $S = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2}$. Acrescentando-se a medida da altura do triângulo ABC a S teremos a soma que está sendo pedida. Como a altura de um triângulo equilátero de lado 1 é igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, temos que $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + \ldots = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \dfrac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$

Alternativa D

4. M tem x colunas e (54–3x) colunas. Chamando de n o número de elementos de M, temos que n = x.(54–3x). Como a relação entre n e x define uma função quadrática, o valor máximo de n é dado pelo vértice da parábola. Portanto, temos:

$$n = -\frac{\Delta}{4a} \rightarrow n = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \rightarrow n = -\frac{[54^2 - 4.(-3).0]}{-12} \rightarrow n = 243$$

Alternativa C

5. Como trata-se de um polígono regular, cada ângulo externo mede $\dfrac{360^o}{n}$.

Como $\dfrac{360^o}{n}$ tem que ser inteiro positivo, então, n é um divisor positivo de 360^o, com $3 \leq n \leq 360$. Ou seja:

$n \in \{3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,36,40,45,60,72,90,120,180,360\}$

Temos, portanto, 22 possibilidades para n.

Alternativa C

6. Da relação fundamental da trigonometria, temos que:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5}$$

Como $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, temos:

$$\cos 2\alpha = \frac{4}{5} - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

Do ΔABD, segue que:

$$\cos 2\alpha = \frac{AB}{3} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{AB}{3} \rightarrow AB = \frac{9}{5}$$

No ΔABC, temos que $tg\,\alpha = \frac{BC}{AB}$, ou seja:

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{BC}{\frac{9}{5}} \rightarrow BC = \frac{9}{10}$$

Como $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, temos:

$$\frac{MN}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{2} \rightarrow MN = \frac{9}{20}$$

Alternativa D

7. O total de combinações possíveis de 25 números agrupados 15 a 15 é dado por $C_{25,15} = \frac{25!}{10!15!}$. Se o apostador jogou 25 volantes diferentes, então ele apostou 25 combinações, o que implica dizer que sua probabilidade de acertar 15 números será igual a: $P = \frac{25}{\frac{25!}{10!\,15!}} = \frac{25.10!\,15!}{25.24!} = \frac{10!\,15!}{24!}$

Alternativa E

8. Completando quadrados na equação dada, teremos:

$$x^2 - 2kx + k^2 + y^2 - 2ky + k^2 = 0 + k^2$$

$(x-k)^2 + (y-k)^2 = k^2 \rightarrow$ Uma circunferência de centro (k,k) e raio k

Como k>0, a circunferência está no 1^o quadrante e tangencia os eixos.

Alternativa C

9. Resolvendo a equação, temos:

$$\Delta = (-1)^2 - 4.i.2i$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2i} \rightarrow x' = \frac{2}{i} \text{ ou } x'' = -\frac{1}{i}$$

Calculando o quadrado da diferença entre as raízes, temos:

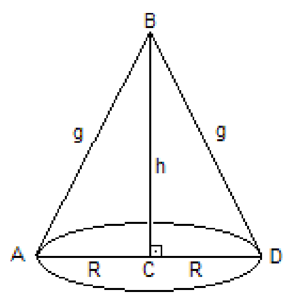
$$\left[\frac{2}{i} - \left(-\frac{1}{i}\right)\right]^2 = \left(\frac{3}{i}\right)^2 = \frac{9}{i^2} = -9 \quad \text{(que é um número inteiro negativo)}$$

Alternativa B

10. Sendo a seqüência uma PG de razão q, temos $\left(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ..., a_1q^{98}\right)$. Então, queremos calcular $\log\left(a_1.a_1.q.a_1.q^2.a_1.q^3...a_1.q^{98}\right)$, que por sua vez é igual a $\log\left(a_1^{99}.q^{1+2+3+...+98}\right)$. Como 1+2+3+...+98 é a soma dos termos de uma PA, sabemos que seu resultado será dado por $\frac{(1+98).98}{2} = 99.49$.
Temos, portanto, $\log\left(a_1^{99}.q^{99.49}\right) = \log\left(a_1.q^{49}\right)^{99} = 99.\log\left(a_1.q^{49}\right) = 99.\log\left(a_{50}\right)$

Alternativa B

11.



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ABC, $g^2 = h^2 + R^2 \rightarrow h = \sqrt{g^2 - R^2}$.
Sendo a área do triângulo ABD igual a 3, temos:

$$3 = \frac{2.R.h}{2} \rightarrow 3 = R.\sqrt{g^2 - R^2}$$

Como o volume do cone é $V = \frac{1}{3}.\pi.R^2.h$, temos:

$$V = \frac{1}{3}.\pi.R^2.\sqrt{g^2 - R^2} \rightarrow V = \frac{1}{3}.\pi.R.3 \rightarrow V = \pi.R$$

Alternativa D

12. Como a abscissa de C é um valor entre a abscissa de A e de B, AC+BC será mínimo quando os pontos A, B e C estiverem alinhados. Então:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 5 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & k & 1 & \frac{5}{2} & k \end{array}\right| = 0 \rightarrow 5 + \frac{25}{2} + 2k - 10 - 5k - \frac{5}{2} = 0 \rightarrow k = \frac{5}{3}$$

Alternativa E